Math. Rep. Acad. Sci. Canada - Vol. VII, No. 3, June 1985 juin

# δ-ANNEAUX ET VECTEURS DE WITT

ANDRE JOYAL

*Presented by P. Ribenboim, F.R.S.C.*

Résumé

Nous donnons à la théorie des vecteurs de Witt une formulation nouvelle en utilisant les méthodes de l'algèbre universelle et de la théorie des catégories. On introduit une structure algébrique, celle de δ-anneau. Un δ-anneau est un anneau commutatif muni d'une opération unaire supplémentaire satisfaisant à des identités algébriques simples. Le résultat principal consiste à montrer que le foncteur oubliant de la catégorie des δ-anneaux vers celle des anneaux commutatifs possède un adjoint à droite W. Un calcul explicite permet l'identification de W(A) avec l'anneau des vecteurs de Witt sur A. On donne des démonstrations plus conceptuelles de plusieurs résultats de la théorie des vecteurs de Witt [7,2].

## 1- δ-anneaux

Fixons une fois pour toute un nombre premier p et une puissance $q = p^r$ $(r \geq 0)$.

DEFINITION 1  Un δ-anneau A est un anneau commutatif muni d'une opération unaire $\delta: A \to A$ satisfaisant aux identités suivantes:

i) $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{p}\binom{q}{i} x^i y^{q-i}$

ii) $\delta(xy) = x^q\delta(y) + \delta(x)y^q + p\delta(x)\delta(y)$ , $\delta(1) = 0$

Nous dirons aussi que A est un $\delta$-anneau relativement au couple $(p,q)$.

Ces conditions entraînent que l'opération unaire $f(x) = x^q + p\delta(x)$ est un endomorphisme de l'anneau A:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$
$$f(1) = 1$$

Nous dirons que f est l'<u>endomorphisme de Frobenius</u>. Inversement, soit f un endomorphisme d'un anneau commutatif A sans p-torsion. Supposons que pour tout $x \in A$

$$f(x) \equiv x^q \mod pA$$

On obtient une structure de $\delta$-anneau sur A en définissant $\delta$ comme suit:

$$\delta(x) = \frac{1}{p}(f(x) - x^q)$$

<u>Exemple 1</u>. L'anneau $\mathbb{Z}$ admet une seule structure de $\delta$-anneau puisque le seul endomorphisme de $\mathbb{Z}$ est l'identité.

<u>Exemple 2</u> Soit L une extension galoisienne d'un corps K. Soit $B \subset L$ un anneau de valuation discrète et soit $A = B \cap K$. On suppose que $p = p \cdot 1$ est une uniformisante pour B et que $A/pA \simeq \mathbb{F}_q$. On sait montrer [1] l'existence d'une <u>substitution de Frobenius</u> $\sigma \in \mathrm{Galois}\,(L/K)$ caractérisée par

i) $\sigma(B) = B$

ii) $\sigma(x) \equiv x^q \mod pB$

Un morphisme de $\delta$-anneau est un homomorphisme d'anneaux qui préserve $\delta$. Nous dirons aussi que c'est un $\delta$-morphisme. On vérifie que l'endomorphisme de Frobenius est un $\delta$-morphisme.

e A est un $\delta$-anneau relativement au couple $(p,q)$.

entraînent que l'opération unaire $f(x) = x^q + p\delta(x)$ est
nneau A:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$
$$f(1) = 1$$

t l'endomorphisme de Frobenius. Inversement, soit f un
eau commutatif A sans p-torsion. Supposons que pour tout

$$f(x) \equiv x^q \mod pA$$

ture de $\delta$-anneau sur A en définissant $\delta$ comme suit:

$$\delta(x) = \frac{1}{p}(f(x) - x^q)$$

$\mathbb{Z}$ admet une seule structure de $\delta$-anneau puisque le seul
st l'identité.

ne extension galoisienne d'un corps K. Soit $B \subset L$ un anneau
e et soit $A = B \cap K$. On suppose que $p = p \cdot 1$ est une unifor-
e $A/pA \simeq \mathbb{F}_q$. On sait montrer [1] l'existence d'une substi-
$\sigma \in$ Galois (L/K) caractérisée par

mod pB

$\delta$-anneau est un homomorphisme d'anneaux qui préserve $\delta$.
e c'est un $\delta$-morphisme. On vérifie que l'endomorphisme
$\delta$-morphisme.



THÉORÈME 1 Soit $\mathbb{Z}[x_0,x_1,\ldots]$ l'anneau des polynômes sur une suite infinie d'indéterminés. Il y a une seule structure de $\delta$-anneau sur $\mathbb{Z}[x_0,x_1,\ldots]$ pour laquelle $\delta(x_n) = x_{n+1}$ pour tout n. Muni de cette structure, $\mathbb{Z}[x_0,x_1\ldots]$ est un $\delta$-anneau libre sur $x_0$.

Désignons par $\underline{A}$ la catégorie des anneaux et par $\underline{\delta A}$ celle des $\delta$-anneaux.

THÉORÈME 2 Le foncteur oubliant $U: \underline{\delta A} \to \underline{A}$ possède un adjoint à droite $W: \underline{A} \to \underline{\delta A}$.

La théorie des catégorie [6] met en évidence l'équivalence entre le théorème précédent et le suivant:

THÉORÈME 3 Soient $A \to B$ et $A \to C$ des morphismes de $\delta$-anneaux. Considérons le carré

$$\begin{array}{ccc} A & \to & C \\ \downarrow & & \downarrow i_2 \\ B & \underset{i_1}{\to} & B \otimes_A C \end{array}$$

Il y a sur $B \otimes_A C$ une seule structure de $\delta$-anneaux pour laquelle $i_1$ et $i_2$ sont des $\delta$-morphismes.

On peut donner une démonstration directe de ces théorèmes ou encore utiliser [8,9]. Comme conséquence, on a:

COROLLAIRE Le foncteur $W: \underline{A} \to \underline{\delta A}$ est représentable par l'anneau $\mathbb{Z}[x_0,x_1,\ldots]$. Il y a une bijection naturelle:

$$\gamma_A: W(A) \xrightarrow{\sim} A^{\mathbb{N}}$$

La bijection $\gamma_A$ s'explicite comme suit:

$$\begin{aligned} W(A) &\simeq \mathrm{Hom}_\delta(Z[x_0,x_1,\ldots], W(A)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}\ (Z[x_0,x_1,\ldots], A) \\ &\simeq A^N \end{aligned}$$

## 2- Vecteurs de Witt

Pour voir que $W(A)$ est isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt sur $A$, il suffira d'utiliser une description différente du $\delta$-anneau libre sur un générateur. Cette description est basée sur le résultat suivant.

PROPOSITION 1 <u>On peut définir dans la théorie des $\delta$-anneaux une suite unique d'opérations unaires</u> $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\ldots$ <u>vérifiant les identités</u>

$$f^n(x) = \delta_0(x)^{q^n} + p\delta_1(x)^{q^{n-1}} + \ldots + p^n\delta_n(x) \qquad (n\geq 0)$$

Les deux premiers termes de la suite sont $\delta_0(x) = x$ et $\delta_1(x) = \delta(x)$.

PROPOSITION 2 <u>Il y a sur</u> $Z[Y_0,Y_1,Y_2,\ldots]$ <u>une seule structure de $\delta$-anneau pour laquelle</u> $\delta_n(Y_0) = Y_n$ <u>pour tout</u> $n\geq 0$. <u>Muni de cette structure</u>, $Z[Y_0,Y_1,Y_2,\ldots]$ <u>est un $\delta$-anneau libre sur</u> $Y_0$.

THEOREME 4 <u>Si $q=p$ l'anneau</u> $W(A)$ <u>s'identifie à l'anneau des vecteurs de Witt sur</u> $A$.

A chaque élément $x\in W(A)$ correspondant un vecteur de Witt $\pi_A(x)\in A^N$. La description de $\pi_A$ est semblable à celle de $\gamma_A$ mais elle utilise plutôt le $\delta$-anneau libre $Z[Y_0,Y_1,\ldots]$.

s'explicite comme suit:

$$W(A) \simeq \mathrm{Hom}_\delta(Z[x_0,x_1,\ldots], W(A))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}\ (Z[x_0,x_1,\ldots], A)$$
$$\simeq A^N$$

A) est isomorphe à l'anneau des vecteurs de Witt sur A,
· une description différente du δ-anneau libre sur un gé-
:ription est basée sur le résultat suivant.

ut définir dans la théorie des δ-anneaux une suite unique
$\delta_0,\delta_1,\delta_2,\ldots$ vérifiant les identités

$$= \delta_0(x)^{q^n} + p\delta_1(x)^{q^{n-1}} + \ldots + p^n\delta_n(x) \qquad (n\geq 0)$$

·s termes de la suite sont $\delta_0(x) = x$ et $\delta_1(x) = \delta(x)$.

a sur $Z[Y_0,Y_1,Y_2,\ldots]$ une seule structure de δ-anneau
$= Y_n$ pour tout $n\geq 0$. Muni de cette structure, $Z[Y_0,Y_1,Y_2\ldots$
e sur $Y_0$.

l'anneau $W(A)$ s'identifie à l'anneau des vecteurs de Witt

t $x\in W(A)$ correspondant un vecteur de Witt $\pi_A(x)\in A^N$. La
t semblable à celle de $\gamma_A$ mais elle utilise plutôt le δ-an-
..].



L'endofoncteur composé $\underline{A} \xrightarrow{W} \underline{\delta A} \xrightarrow{U} \underline{A}$ est une co-monade [6,3,2] sur $\underline{A}$. Pour simplifier, nous noterons encore ce foncteur par W. On a des transformations naturelles

$$W(A) \xrightarrow{\varepsilon_A} A \qquad W(A) \xrightarrow{E_A} W(W(A))$$

satisfaisant à des conditions d'associativité et d'unité. L'homomorphisme $E_A$ est étroitement relié à l'exponentielle de Artin-Hasse [3]. Une structure de δ-anneau sur A équivaut à une structure de co-algèbre [6] $\underline{\delta}: A \to W(A)$. Celle-ci se décrit comme suit: pour tout $x\in A$ on a $\pi_A\underline{\delta}(x) = (\delta_0(x), \delta_1(x),\ldots)$.

Remarques

1) Soit A un anneau sans p-torsion muni d'un endomorphisme f tel que pour tout $x\in A$, $f(x) \equiv x^q \bmod pA$. Le lemme de Dieudonné-Cartier [4, page 508] affirme l'existence d'un homomorphisme $s_f: A \to W(A)$. Ce résultat s'interprète comme suit dans le contexte présent: les hypothèses entraînent l'existence d'une structure de δ-anneau sur A et on vérifie que $s_f = \underline{\delta}$.

2) Sous les hypothèses de la remarque précédente, on donne une description particulièrement simple de W(A) [5]. Posons

$$B = \{(a_n)\in A^N | a_{n+1} \equiv f(a_n) \bmod p^{n+1}\ \forall n\}$$

On vérifie que B est un sous-anneau de l'anneau produit $A^N$. L'opérateur de translation $t((a_n)) = (a_{n+1})$ est un endomorphisme de B et pour tout $x\in B$,

$$t(x) \equiv x^q \mod pB$$

Comme B est sans p-torsion, on a une structure de δ-anneau sur B pour laquelle t est l'endomorphisme de Frobenius. On vérifie ensuite directement

qu'avec la projection B → A, B devient le δ-anneau co-libre sur l'an[...]
A, donc que B=W(A).

## Bibliographie


[1] Bourbaki. Algèbre, Chap. V, 11.

[2] Bourbaki. Algèbre, Chap. 8 et 9.

[3] M. Hazewinkel. Formal Groups and Applications. Academic Press Mono[...] 78, 1978.

[4] L. Illusie. Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline. An[...] Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. $4^{o}$ série, t12, 1979, p. [...] 661.

[5] M. Lazard. Commutative Formal Groups. Lect. Notes in Math. 443, Spr[...] Verlag.

[6] S. MacLane. Category theory for the working Mathematician. Graduate [...] in Math. 5, Springer Verlag.

[7] P. Ribenboim. L'Arithmétique des corps. Hermann, Paris 1972.

[8] D.O. Tall, G.C. Wraith. Representable Functors and Operations on Rin[...] Proceedings of the London Mathematical Society (3) 20 (1970) p. 619-6[...]

[9] G.C. Wraith. Algebras over theories. Colloquium Mathematicum. vol. X[...] (1971) fasc 2.


Département de Mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Montréal

Received March 28, 1985

References

eukirch, G. H. Wenzel, A subgroup Theorem for
of pro-finite groups, J. of Algebra 19,
).

ies: Model theory of field, Dissertation
78).

T. Y. Lam, Quadratic forms under algebraic
ath. Ann. 219, 21-42 (1976).

derings, Valuations and Quadratic forms, CBMS
3).

D. Shapiro, The square class invariant for
ields, Contemporary Math., Vol. 8 (1982),

adratic forms over fields with finitely many
ntemporary Math., Vol. 8, (1982), p. 185-229.

fields for which the number of orderings is
a high power of 2, I. (Will appear in C. R.
i. Sci. Canada).

M. Viswanathan, On the absolute Galois group
elds with respect to extension of orderings
on).

.č: On p-extensions, Amer. Math. Soc. Trans.
4 (1956).

atic forms and profinite 2-groups, Journal
l. 58, No. 1, (1979).

atic forms and pro-2-groups III Preprint No.
f Math., Pennsylvania State University.

his paper has been written whilst pursuing a
Queen's University in Kingston. I am
aulo Ribenboim and Prof. T. M. Viswanathan for
and suggestions.





C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada - Vol. VII, No. 4 Aug. 1985 août

# $\delta$-ANNEAUX ET $\lambda$-ANNEAUX

ANDRE JOYAL

*Presented by P. Ribenboim, F.R.S.C.*

**Résumé**

Nous montrons comment obtenir la théorie des $\lambda$-anneaux [3] à partir de celle des $\delta$-anneaux [4]. La suite d'opérations $(\lambda^n | n\in N)$ est remplacée par une suite d'opérations $(\delta_p | p$ nombre premier$)$ satisfaisant à des identités explicites. En conséquence, nous pouvons exhiber pour chaque $n\in N$ une base remarquable des caractères du groupe symétrique $S_n$.

## 1- $\delta$-opérations sur un $\lambda$-anneau

Soit $(\Psi^n | n\geq 1)$ la suite d'opérations d'Adams en théorie des $\lambda$-anneaux. On sait que $\Psi^n$ est un endomorphisme d'anneau et que

$$\Psi^n \circ \Psi^m = \Psi^{nm} \quad \text{pour tout } n,m\geq 1.$$

Pour chaque nombre premier p soit $c^p$ l'opération de puissance cyclique d'ordre p [1]. On vérifie l'identité

$$p c_p(x) = x^p + (p-1)\Psi^p(x).$$

Posons

$$\delta_p(x) = \Psi^p(x) - c^p(x).$$

On a alors

$$\Psi^p(x) = x^p + p\,\delta_p(x)$$

Comme le $\lambda$-anneau libre sur un générateur est sans $p$-torsion et que $\Psi^p$ est un endomorphisme, on conclut que l'opération $\delta_p$ donne à cet anneau une structure de $\delta$-anneau [4]. Plus généralement, on voit que tout $\lambda$-anneau est un $\delta$-anneau relativement à chaque nombre premier $p$. Nous désirons expliciter les relations entre $\delta_{p_1}$ et $\delta_{p_2}$ pour des nombres premiers distincts $p_1$ et $p_2$.

Soient $q_1 = p_1^{r_1}$ et $q_2 = p_2^{r_2}$ où $p_1$ et $p_2$ sont des nombres premiers distincts. Soit A un anneau commutatif muni de deux opérations unaires $\delta_1$ et $\delta_2$. On suppose que $(A,\delta_1)$ est un $\delta$-anneau relativement à $(p_1,q_1)$ et que $(A,\delta_2)$ est un $\delta$-anneau relativement à $(p_2,q_2)$.

DEFINITION Les opérations $\delta_1$ et $\delta_2$ sont <u>permutables</u> si l'identité suivante est vérifiée:

$$\delta_1(\delta_2(x)) + \frac{p_1^{q_2-1} - 1}{p_2}\,\delta_1(x)^{q_2} + \sum_{i=1}^{q_2-1} \frac{1}{p_2}\binom{q_2}{i} p_1^{i-1}\delta_1(x)^i\, x^{q_1(q_2-i)}$$

$$= \delta_2(\delta_1(x)) + \frac{p_2^{q_1-1} - 1}{p_1}\,\delta_2(x)^{q_1} + \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{1}{p_1}\binom{q_1}{i} p_2^{i-1}\delta_2(x)^i\, x^{q_2(q_1-i)}$$

La permutabilité des opérations $\delta_1$ et $\delta_2$ entraîne la commutation des endomorphismes de Frobenius $f_1(x) = x^{q_1} + p_1\delta_1(x)$ et $f_2(x) = x^{q_2} + p_2\delta_2(x)$. Réciproquement, si A est sans $p_1p_2$-torsion, la relation $f_1f_2 = f_2f_1$ entraîne la permutabilité de $\delta_1$ et $\delta_2$.

$$\psi^p(x) = x^p + p\,\delta_p(x)$$

bre sur un générateur est sans p-torsion et que $\psi^p$ est un
nclut que l'opération $\delta_p$ donne à cet anneau une structure
us généralement, on voit que tout $\lambda$-anneau est un $\delta$-anneau
e nombre premier p. Nous désirons expliciter les relations
r des nombres premiers distincts $p_1$ et $p_2$.

et $q_2 = p_2^{r_2}$ où $p_1$ et $p_2$ sont des nombres premiers dis-
nneau commutatif muni de deux opérations unaires $\delta_1$ et
$(A,\delta_1)$ est un $\delta$-anneau relativement à $(p_1,q_1)$ et que (A,
relativement à $(p_2,q_2)$.

ations $\delta_1$ et $\delta_2$ sont permutables si l'identité suivante

$$\frac{p_1^{q_2-1}-1}{p_2}\,\delta_1(x)^{q_2} + \sum_{i=1}^{q_2-1}\frac{1}{p_2}\binom{q_2}{i}p_1^{i-1}\delta_1(x)^i\,x^{q_1(q_2-i)}$$

$$\frac{p_2^{q_1-1}-1}{p_1}\,\delta_2(x)^{q_1} + \sum_{i=1}^{q_1-1}\frac{1}{p_1}\binom{q_1}{i}p_2^{i-1}\delta_2(x)^i\,x^{q_2(q_1-i)}$$

é des opérations $\delta_1$ et $\delta_2$ entraîne la commutation des en-
enius $f_1(x) = x^{q_1} + p_1\delta_1(x)$ et $f_2(x) = x^{q_2} + p_2\delta_2(x)$.
est sans $p_1p_2$-torsion, la relation $f_1f_2 = f_2f_1$ entraîne
$\delta_1$ et $\delta_2$.



2- P-anneaux

Soit P un ensemble de nombres premiers.

DEFINITION Un P-anneau A est un anneau commutatif muni d'une opération unaire $\delta_p$: $A \to A$ pour chaque $p \in P$. On demande que soient réalisées les conditions suivantes:

i) A muni de $\delta_p$ est un $\delta$-anneau relativement au couple $(p,p)$

ii) $\delta_p$ et $\delta_\ell$ sont permutables pour tout couple d'éléments distincts $p,\ell \in P$

Exemple 1 Tout $\lambda$-anneau est naturellement muni d'une structure de P-anneau où P est l'ensemble de tous les nombres premiers.

Exemple 2 Soit n un entier $\geq 1$ et soit $\zeta_n \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Soit $R_n$ l'anneau des entiers du corps cyclotomique $Q(\zeta_n)$. Soit $P_n$ l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas n. Pour chaque $p \in P_n$, soit $f_p$ l'unique automorphisme de $R_n$ tel que $f(\zeta_n) = \zeta_n^p$. On a pour tout $x \in R_n$,

$$f_p(x) = x^p \mod pR_n$$

Ceci montre que $R_n$ est un $\delta$-anneau relativement au couple $(p,p)$. Comme $f_pf_\ell = f_\ell f_p$ pour tout $p,\ell \in R_n$, on conclut que $R_n$ est un $P_n$-anneau.

Un morphisme de P-anneaux est un homomorphisme d'anneaux qui préserve chaque opération $\delta_p(p \in P)$. On vérifie que chaque endomorphisme de Frobenius $f_p(p \in P)$ est un morphisme de P-anneaux.

Soit A un P-anneau et soit M(P) l'ensemble des suites finies d'éléments de P. Pour chaque $\sigma = (p_1,\ldots,p_n) \in M(P)$, posons

$$\delta_\sigma = \delta_{p_1} \circ \delta_{p_2} \circ \ldots \circ \delta_{p_n}$$

Désignons par $C(P) \subset M(P)$ le sous-ensemble des suites croissantes pour l'or-dre naturel de $P$.

THEOREME 1 Soit $A = \mathbb{Z}[x_\sigma | \sigma \in C(P)]$ l'anneau des polynômes sur des indéterminées $x_\sigma (\sigma \in C(P))$. Il y a une seule structure de $P$-anneau sur $A$ pour laquelle [illegible] $= x_\sigma$ pour tout $\sigma \in C(P)$. Muni de cette structure, $A$ est le $P$-anneau libre sur $x_0$.

Désignons par $\underline{A}$ la catégorie des anneaux et par $\underline{PA}$ celle des $P$-anneaux.

THEOREME 2 Le foncteur oubliant $U: \underline{PA} \to \underline{A}$ possède un adjoint à droite $V: \underline{A} \to \underline{PA}$.

COROLLAIRE Le foncteur $V$ est représentable par l'anneau $\mathbb{Z}[x_\sigma | \sigma \in C(P)]$. On a une bijection naturelle

$$V(A) \simeq A^{C(P)}$$

3- $\Lambda$-anneaux

Dans ce qui suit nous supposerons que $P$ est l'ensemble de tous les nombres premiers. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit un endomorphisme de Frobenius

$$f_n = f_{p_1}^{r_1} \circ \ldots \circ f_{p_k}^{r_k}$$

où $p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ est une décomposition de $n$ en facteurs premiers.

PROPOSITION 1 On peut définir en théorie des $P$-anneaux une suite unique d'opérations unaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ vérifiant les identités

$$f_n(x) = \sum_{r|n} r\, \alpha_r(x)^{n/r} \quad (n \geq 1)$$

| le sous-ensemble des suites croissantes pour l'or-

$\varepsilon C(P)$] l'anneau des polynômes sur des indéterminés

le structure de P-anneau sur A pour laquelle $\delta_\sigma(x_o)$

i de cette structure, A est le P-anneau libre sur

égorie des anneaux et par PA celle des P-anneaux.

liant U: PA $\to$ A possède un adjoint à droite

est représentable par l'anneau $Z[x_\sigma | \sigma \in C(P)]$. On a

$$V(A) \simeq A^{C(P)}$$

supposerons que P est l'ensemble de tous les nom-

entier $n \geq 1$ on définit un endomorphisme de Frobenius

$$f_n = f_{p_1}^{r_1} \circ \ldots \circ f_{p_k}^{r_k}$$

position de n en facteurs premiers.

finir en théorie des P-anneaux une suite unique d'o-

. vérifiant les identités

$${}_1(x) = \sum_{r|n} r\, \alpha_r(x)^{n/r} \quad (n \geq 1)$$



PROPOSITION 2 Il y a sur $Z[A_1, A_2, \ldots]$ une seule structure de P-anneaux pour laquelle $\alpha_n(A_1) = A_n$ pour tout $n \geq 1$. Muni de cette structure, $Z[A_1, A_2, \ldots]$ est un P-anneau libre sur $A_1$.

THEOREME 3 Lorsque P est l'ensemble de tous les nombres premiers, les concepts de P-anneaux et de $\lambda$-anneaux sont équivalents.

La démonstration de ce théorème utilise l'approche de Cartier [2].

Exemple 3 Soit $R_n$ l'anneau de l'exemple 2. On peut munir $R_n[1/n]$ d'une structure de $\lambda$-anneau. En effet, il suffit de définir $f_p$ = identité pour $p \notin P_n$. En particulier, $Z[i, \frac{1}{2}]$ est un $\lambda$-anneau.

Le $\lambda$-anneau $\Lambda[x]$ libre sur un générateur est un anneau de polynômes $Z[x, \lambda x, \lambda^2 x, \ldots]$. On introduit sur $\Lambda[x]$ une graduation naturelle en posant deg $\lambda^n x = n$ pour tout $n \in N$. Cet anneau gradué peut encore se décrire en utilisant la théorie des caractères des groupes symétriques $S_n (n \geq 0)$ [1]. Soit $R(S_n)$ le groupe des caractères de $S_n$. Considérons l'inclusion $S_n \times S_m \subset S_{n+m}$. On définit une opération bilinéaire

$$R(S_n) \times R(S_m) \to R(S_n \times S_m) \to R(S_{n+m})$$

et par suite, une structure d'anneau gradué sur

$$\bigoplus_{n \geq 0} R(S_n)$$

Cet anneau est isomorphe à $\Lambda[x]$ [5]. Soit maintenant $Z[\delta_\sigma(x) | \sigma \in C(P)]$ l'anneau des polynômes mentionné dans le théorème 1. On introduit une graduation sur cet anneau en posant

$$\deg \delta_\sigma(x) = p_1 p_2 \cdots p_n$$

lorsque $\sigma = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

COROLLAIRE <u>Les anneaux gradués</u> $\bigoplus_{n\geq 0} R(S_n)$ <u>et</u> $\mathbb{Z}[\theta_\sigma(x) \mid \sigma \in C(P)]$ <u>sont isom</u>

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah. Power Operations in K-theory. Quart. J. Math. (2) 17

165-93.

[2] P. Cartier. Groupes formels associés aux anneaux de Witt généra

C.R. Acad. Sc. Paris, t.265, 1967, A-49-52.

[3] A. Grothendieck. Classes de Faisceaux et Théorème de Riemann-Roch

Notes in Math. No 225 (1972) Springer Verlag.

[4] A. Joyal. δ-anneaux et vecteurs de Witt. C.R. Math. Société Royale

Canada.

[5] D. Knutson. λ-rings and the representation theory of the symmetr

Lect. Notes in Math. 308 (1973) Springer Verlag.

Département de Mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Mont

Received March 28, 1985